

OR RefCard III 2010

1 Modelos de Colas Básicos

1. Descripción de un Modelo de Colas

- (a) Clientes, Población, Servidores, Cola.
- (b) Elementos Básicos:
- (c) Población: finita/infinita
- (d) Llegadas: patrón determinista/aleatorio; λ tasa media de llegadas; τ tpos entre llegadas; M llegadas exponenciales; llegadas estacionario-dependiente.estado-en.masa-impacientes
- (e) Servicio: s tpo.servicio; μ tasa de servicio; $CV^2(s) = Var(s)/(E(s))^2$, $s.cte \sim CV^2(s) = 0$; $Erlang - k \sim CV^2(s) = 1/k$; $exponencial \sim CV^2(s) = 1$; $Hiperexponencial \sim CV^2(s) \geq 1$; servicio estacionario-dependiente.estado-en.masa
- (f) Servidores: c.servidores.idénticos, líneas.espera,
- (g) Etapas: múltiples-retroalimentación
- (h) Capacidad: ilimitada/limitada; perdidas
- (i) Disciplina de cola: FIFO, LIFO, SIFO; RR - PS; clases.prioridad (expulsiva)
- (j) Notación de Kendall: $A/B/c/K/m/Z \sim$
distr.llegadas/distr.servicio/canales/capacidad/población/disciplina.cola

2. Variables Aleatorias y Medidas de Interés: rendimiento estacionario

- (a) A número de clientes en el sistema $\pi_n = P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t)$
- (b) Trabajo $W_s = 1/\mu$
- (c) Intensidad de tráfico $r = \lambda/\mu = \lambda E(s) = E(s)/E(\tau)$
- (d) Uso del servidor $\rho = r/c = \lambda/(c\mu)$; $\rho < 1$; $\rho = 1$; $\rho > 1$
- (e) Caudal $\tilde{\lambda} \leq \min\{\lambda, c\mu\}$
- (f) Tpo sistema $W = E(w)$
- (g) Tpo cola $q, W_q = E(q)$; $w = q + s$; $W = W_q + W_s$; $F_w(t), F_q(t), F_s(t)$
- (h) N clientes sistema $L = E(N) = \sum n\pi_n$

- (i) N clientes cola $N_q = E(N_q)$; $N = N_q + N_s$; $L = L_q + L_s$
- (j) Formulas de Little: $L = \lambda W$; $L_q = \lambda W_q$; $L_s = \lambda W_s$
- (k) π_n ; a_n al llegar; b_n al salir; si llegadas y servicio son secuenciales $a_n = b_n$
- (l) PASTA: $\pi_n = a_n, \forall n \geq 0$ (Poisson Arrivals See Time Averages)

2 Modelos de Colas Exponenciales

1. Introducción a las Colas Exponenciales: M/M

- (a) Procesos Markov nacimiento (llegada) y muerte (salida). Estado $\equiv N(t)$
- (b) E.Equilibrio: $\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0}{\mu_n, \dots, \mu_1}}$, $\pi_n = \pi_0 \frac{\lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0}{\mu_n, \dots, \mu_1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- (c) C.Equilibrio: $S_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0}{\mu_n, \dots, \mu_1} = 1/\pi_0 < \infty$,
 $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (1/\lambda_n \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i/\mu_{i+1}) \infty \rightarrow \exists n_0, \forall n > n_0, \lambda_n/\mu_n < 1$.

2. Modelo M/M/1: un Servidor

- (a) $\lambda_n = \lambda, n=0,1,\dots, \mu_n = \mu, n=1,2,\dots$, diagrama de transición
- (b) EE: $\mu\pi_1 = \lambda\pi_0, \lambda\mu_{n-1} + \mu\pi_{n+1} = (\lambda + \mu)\pi_n, n \geq 1$
- (c) C.E: $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n < \infty, S_1 = 1/\lambda \sum_{n=0}^{\infty} 1/\rho^n = \infty$,
 $\rho < 1 \rightarrow M/M/1$ ergódico
- (d) $\pi_0 = 1/S_1 = 1 - \rho, \pi_n = (1 - \rho)\rho^n \sim G(1 - \rho)$,
Servidor.ocupado $P(N = 1) = \rho, P(N \geq n) = \rho^n$
- (e) $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \sigma_N^2 = \frac{\rho}{(1 - \rho^2)}, L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = L - (1 - \pi_0), L'_q = \frac{1}{1 - \rho} = L_q/\rho^2$
- (f) $W = E(w) = E(s)/(1 - \rho), W_q = E(q) = \rho E(s)/(1 - \rho), E(q|q > 0) = W$,
 $F_q(t) = 1 - \rho e^{-t/W}, t \geq 0, F_w(t) = 1 - e^{-t/W}, t \geq 0$

3. Modelos M/M/1/K: Capacidad K Finita del Sistema

- (a) $\lambda_n = \{\lambda, n = 0, 1, \dots, K - 1; 0, n \geq K\}, \mu_n = \{\mu, n = 1, 2, \dots, K; 0, n > K\}$
- (b) EE: $\mu\pi_1 = \lambda\pi_0, \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} = (\lambda + \mu)\pi_n, \lambda\pi_{K-1} = \mu\pi_K, \sum_{n=0}^K \pi_n = 1$
- (c) $\pi_n = (\lambda/\mu)^n \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}, \lambda \neq \mu, n = 0, 1, \dots, K$,
 $\pi_n = \frac{1}{K+1}, \lambda = \mu, n = 0, 1, \dots, K$

- (d) $L = \frac{\lambda(1-(K+1)(\lambda/\mu)^K + K(\lambda/\mu)^{K+1})}{(\mu-\lambda)(1-(\lambda/\mu)^{K+1})}, \lambda \neq \mu, L = K/2, \lambda = \mu$
- (e) $L_s = 1 - \pi_0, L_q = L - (1 - \pi_0), \lambda_e = \lambda(1 - \pi_K), \rho = \lambda_e W = 1 - \pi_0$
- (f) $W = L/\lambda_e, W_q = L_q/\lambda_e, E(q|q > 0) = W_q/\rho,$
 $F_w(t) = 1 - \sum_{n=0}^{K-1} q_n F_{\mathcal{P}(\mu_{\sqcup})}(n), F_q(t) = 1 - \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} F_{\mathcal{P}(\mu_{\sqcup})}(n),$
 $F_{\mathcal{P}(\mu_{\sqcup})}(n) = \sum_{i=0}^n \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!} = \int_t^\infty \mu \frac{\mu^n x^n e^{-\mu x}}{n!} dx$

4. Modelo $M/M/c$: c Servidores Paralelos

- (a) $\lambda_n = \lambda, n = 0, 1, \dots, \mu_n = n\mu, n = 1, 2, \dots, c; \mu_n = c\mu, n \geq c$
- (b) EE: $\mu\pi_1 = \lambda\pi_0; \lambda\pi_{n-1} + (n + 1\mu\pi_{n+1}) = (\lambda + n\mu)\pi_n, 1 \leq n \leq c - 1;$
 $\lambda\pi_{n-1} + c\mu\pi_{n+1} = (\lambda + c\mu)\pi_n, n \geq c$
- (c) $\pi_0 = [\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!(1-\lambda/(c\mu))}]^{-1}; \pi_n = \pi_0 r^n / n!, n = 0, 1, \dots, c; \pi_n = \pi_0 r^n / (c!c^{n-c}), n \geq c$
- (d) $C(c, r) = P(N \geq c) = \pi_0 r^c / (c!(1 - \rho))$
- (e) $L_q = C(c, r) \frac{\rho}{1-\rho}, W_q = \frac{C(c, r)}{c\mu(1-\rho)}, E(q|q > 0) = \frac{1}{c\mu(1-\rho)}, W = W_q + W_s = 1/\mu(1 + \frac{C(c, r)}{c(1-\rho)}), L = \lambda W = c\rho + C(c, r) \frac{\rho}{1-\rho}$
- (f) $F_q(t) = 1 - C(c, r)e^{-(1-\rho)c\mu t}; q_l = \frac{1}{c\mu(1-\rho)} \ln(\frac{C(c, r)}{1-l});$
 $F_w(t) = 1 + \frac{r-c+1-C(c, r)}{c-1-r} e^{-\mu t}, r \neq c-1; 1 - [1 + C(c, r)\mu t]e^{-\mu t}, r = c-1$
- (g) Dos servidores: $\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}, \pi_n = 2\rho^n \pi_0, C(2, r) = \frac{2\rho^2}{1+\rho}, L_q = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2},$
 $W_q = \frac{\rho^2 E[s]}{1-\rho^2}, L = \frac{2\rho}{1-\rho^2}, W = \frac{E[s]}{1-\rho^2}$

5. Modelo $M/M/\infty$: Infinitos Servidores

- (a) $\lambda_n = \lambda, n = 0, 1, 2, \dots, \mu_n = n\mu, n = 0, 1, 2, \dots$
- (b) EE: $\mu\pi_1 = \lambda\pi_0; \lambda\pi_{n-1} + (n + 1)\mu\pi_{n+1} = (\lambda + n\mu)\pi_n, n \geq 1$
- (c) $N \sim P(r = \lambda/\mu), \pi_n = \frac{(\lambda/\mu)^n e^{-(\lambda/\mu)}}{n!}, n = 0, 1, \dots$
- (d) $L = \lambda/\mu, \sigma_N^2 = \lambda/\mu, L_q = W_q = 0, W = W_s = 1/\mu, w \sim s \sim \text{Exp}(\mu)$

3 Modelos de Colas Avanzados: Redes de Colas

Redes de colas: conjunto de nodos interconectados de forma asíncrona y concurrente. Estructura topológica, trayectorias de los clientes, procesos estocásticos y dinámica de estados del sistema.

1. Redes Abiertas

- (a) Teorema de Burke: el proceso de salidas de clientes de un sistema $M/M/c$ estable con tasa de llegadas λ es un proceso de Poisson de tasa λ .

(b) Colas en serie:

- EE: $\mu_2\pi_{0,1} = \lambda\pi_{0,0};$
 $\lambda\pi_{n-1,0} + \mu_2\pi_{n,1} = (\lambda + \mu_1)\pi_{n,0};$
 $\mu_1\pi_{1,m-1} + \mu_2\pi_{0,m+1} = (\lambda + \mu_2)\pi_{0,m};$
 $\lambda\pi_{n-1,m} + \mu_1\pi_{n+1,m-1} + \mu_2\pi_{n,m+1} = (\lambda + \mu_1 + \mu_2)\pi_{n,m}; \sum_{n,m} \pi_{n,m} = 1$
- $\pi_{n,m} = \pi_n^1 \pi_m^2$
- $L = \lambda/(\mu_1 - \lambda) + \lambda/(\mu_2 - \lambda);$
 $W = L/\lambda = 1/(\mu_1 - \lambda) + 1/(\mu_2 - \lambda);$
 $W_q = W - (1/\mu_1 + 1/\mu_2)$

(c) Redes de Jackson Abiertas (R nodos). Teorema:

- cada nodo i tiene c_i servidores idénticos con tiempo de servicio exponencial de tasa μ_i .
- los clientes llegan al nodo i desde fuera del sistema según un proceso de Poisson de tasa λ_i y desde otros nodos.
- los clientes que salen de un nodo i pasan instantáneamente al nodo j con probabilidad p_{ij} o abandonan la red con probabilidad $1 - \sum_{j=1}^R p_{ij}$
- $\rightarrow \Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^R \Lambda_j p_{ji}, \forall i$ y $\pi(n_1, \dots, n_R) = \Pi_{j=1}^R \pi(n_j),$
donde cada nodo $\equiv M/M/c_i$ con tasas Λ_i y μ_i si $\Lambda_i < c_i \mu_i \forall i.$
- $L = \sum L_i, W = L / \sum \lambda_i.$

References

- [1] Ríos-Insua, S., Mateos-Caballero, A., Bielza, C., Jimenez-Martín, A. (2004), Investigación Operativa. Modelos determinísticos y estocásticos Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A.